NUMERE, FUNCŢII ŞI SERII COMPLEXE

Cel mai fascinant lucru în matematică

este faptul că $i^i \in R$.

1. Numere şi funcţii complexe

$z = x + iy, \ \ x, y \in R$ este număr complex algebric. (alg)

Numărul complex $\bar{z} = x - iy$ se numeşte conjugatul numărului complex z. Numărul complex z poate fi scris sub forma trigonometrică:

(trig)

$z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, şi sub forma exponenţială:

$$\rho \cdot e^{i\alpha} = z, \qquad \text{(exp)}$$

în care modulul ρ şi argumentul α sunt date de relaţiile

$$\rho = |z| = (z \cdot \bar{z})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \alpha = \arccos\frac{x}{\rho} \text{ şi } \alpha = \arcsin\frac{y}{\rho}.$$

Numerele complexe $z_1 = \rho_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$ şi $z_2 = \rho_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$ sunt egale dacă $\rho_1 = \rho_2$ şi $\alpha_1 = \alpha_2 + 2k\pi$; $(k \in Z)$.

Accent: Reţinem cele trei forme ale numerelor complexe (alg), (trig), (exp).

1.1. Operaţii cu numere complexe

Fie numerele complexe:

$$z_1 = x_1 + iy_1 = \rho_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) \ \text{ şi } \ z_2 = x_2 + iy_2 = \rho_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$$

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2),$$
$$z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2},$$
$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 \cdot e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)},$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)},$$
$$z_1^n = \rho_1^n \cdot e^{in\alpha_1}; \; \sqrt[n]{z_1} = \rho^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{\alpha + 2k\pi}{n}}, \; k = \overline{0, n-1}.$$

1.2. Funcţii complexe de variabilă reală

Funcţia $f : A \subset R \to C$ se numeşte funcţie complexă de variabilă reală. Dacă A este un interval şi f este o funcţie continuă atunci funcţia se numeşte curbă. Notăm variabile cu t. Cum $f(t) \in C$ vom folosi pentru f(t) notaţia: z(t) = x(t) + iy(t).

Ecuaţia

$$Z = z(t) \tag{1}$$

reprezintă ecuaţia în complex a curbei. Ecuaţia (1) poate fi înlocuită de ecuaţiile

$$x = x(t), \; y = y(t) \tag{2}$$

numite ecuaţiile parametrice ale curbei (t se numeşte parametru).

Diagrama unei funcţii complexe de variabilă reală z = z(t) este curba plană reprezentată grafic, însoţită de un procedeu grafic de corespondenţă între valorile parametrului t şi punctele de pe curbă. Curba se numeşte ***suportul diagramei***.

Diagramele rezolvă două probleme:

1. Pentru momentul t se determină punctual pe curbă.

2. Fiind dat punctual de curbă, determinăm momentul căruia îi corespunde acest punct.

1.3. Funcţii complexe de variabilă complexă

Dacă D este un domeniu din C, aplicaţia $f : D \to C$ se numeşte funcţie complexă de variabilă complexă (numele funcţiei este dat de codomeniu). Considerăm variabila complexă $z = x + iy$ funcţia are forma

$$F(z) = f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y),$$
$$U(x,y) = \mathrm{Re}\, f(z),\ V(x,y) = \mathrm{Im}\ f(z).$$

Dacă $z_1 \neq z_2$ implică $f(z_1) \neq f(z_2)$ şi reciproc, pentru orice z_1 şi $z_2 \in D$, atunci f(z) este ***univalentă*** pe D. Funcţia f(z) este ***uniformă*** pe D dacă îşi conservă valoarea $f(z_0)$ din punctul z_0 şi la revenirea variabilei z în z_0 după ce în prealabil a descris un contur (γ) din D pentru orice $z_0 \in D$. Dacă nu este uniformă atunci f(z) este ***multiformă***. Vezi funcţia radical şi logaritmic.

Funcţia f(z) derivabilă în z_0 se numeşte monogenă în z_0. Funcţia f(z) monogenă în orice punct din D se numeşte olomorfă pe D.

Teorema. Funcţia f(z) = U (x,y) + iV(x,y) este monogenă în $z_0 = x_0 + iy_0$ din D dacă şi numai dacă sunt îndeplinite condiţiile:

$$(C-R)\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial V}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial V}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

numite condiţiile Cauchy – Riemann $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

Tipuri de puncte

Definiţie.

(a) Punctul a este punct ordinar al funcţiei f(z) dacă există un domeniu D de olomorfie a funcţiei f(z) care-l conţine pe a.

(b) Punctele din C care nu sunt ordinare pentru f(z) se numesc puncte singulare pentru f(z).

(c) Punctul z = a este pol de ordinul p pentru f(z) dacă este punct ordinar pentru funcţia

$$\varphi(z)=(z-a)^p f(z);\ \varphi(a)\neq 0.$$

Natura punctului de la infinit pentru funcţia f(z) este dată de natura punctului z = 0 pentru

$$F(z)=f\left(\frac{1}{z}\right).$$

Funcţiile raţionale au numai singularităţi de tip poli.

Funcţia radical

$$z=\sqrt[n]{w} \tag{3}$$

Este inversa funcţiei putere

$$w=z^n \tag{4}$$

Dacă $w=\rho\cdot e^{i\omega}$, atunci (3) are soluţii distincte

$$z_k=\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\frac{\omega+2k\pi}{n}},k=\overline{0,n-1} \tag{5}$$

Argumentele lui z_k din (5) se scriu (pentru $\theta_0=\frac{\omega}{n}$)

$$\theta_0,\theta_0+\frac{2\pi}{n},\theta_0+\frac{4\pi}{n},\ldots,\theta_0+\frac{2(n-1)\pi}{n} \tag{6}$$

Atunci, planul (z) va fi împărţit în sectoare prin semidreptele de ecuaţie

$$\arg z = \theta_0 + \frac{2k\pi}{n}, k = \overline{0, n-1} \tag{7}$$

Toate semidreptele din (7) au ca imagine în planul (w) semidreapta

$$\arg w = n\theta_0$$

Funcţia (4) este univalentă în sectoarele

$$I_k = \left[\theta_0 + \frac{2k\pi}{n}, \theta_0 + \frac{2(k+1)\pi}{n}\right), k = \overline{0, n-1}.$$

$w = 0$ şi $w = \infty$ sunt puncte critice algebrice .

Funcţia exponenţială este funcţia

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Deoarece $e^x = e^{x+2\pi i}$ rezultă că este periodică de perioadă $2\pi i$. Este definită în tot planul (z) exceptând punctul $z = \infty$.

Observaţie: $\left|e^z\right| = e^x$ şi $\arg\, e^z = y$

Funcţii construite cu ajutorul funcţiei exponenţiale. Din relaţiile lui Euler

$$\cos u = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2};\ \sin u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}$$

se obţin extinderile în complex

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};\ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{8}$$

Funcţiile hiperbolice

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2};\ \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}. \tag{9}$$

Funcţiile (8) şi (9) sunt olomorfe în orice domeniu care conţine punctul de la infinit. Se folosesc aceleaşi reguli de derivare ca în cazul real.

Funcţia logaritmică este inversa exponenţialei. Ecuaţia $e^z = w$ are soluţia z = ln w. Dacă $z = x + iy;\ w = \rho e^{i\omega}$ obţinem

$$z = \ln(\rho e^{i\omega}) = \ln(\rho e^{i(\omega+2k\pi)}) = \ln\rho + i(\omega + 2k\pi),\ \ k \in Z.$$

Pentru k întreg rezultă că funcţia logaritm este multiformă cu o infinitate de ramuri şi are ca puncte critice z = 0 şi z = ∞, numite *puncte critice logaritmice*.

2. Aplicaţii la numere complexe

1. Determinaţi $z \in C$ astfel încât $\mathrm{Im}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 0$ R: Făcând efectiv calculele obţinem –2x = 0, deci z = iy.
2. Determinaţi modulul şi argumentul pentru i, -2i, -3, 3.
3. Determinaţi mulţimea punctelor $z \in C$ pentru care:

   a) $\arg z = \frac{\pi}{4}$

   b) $0 \le \arg z < \frac{\pi}{3}$

   c) $\arg z \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

   d) $|z| < 1$

   e) $|z| \ge 1$

   f) $|z-1| = 1$

   g) $\left|\frac{z-1}{z-2}\right| = 1$

   h) $\left|\frac{z-1}{z-2}\right| \le 1$.
4. Precizaţi intersecţia curbelor

a) $\begin{cases} |z| = 3 \\ \arg z = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} |z-1| = 3 \\ \arg z = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

5. Ce reprezintă mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$$|z-2i|+|z+4i|=10?$$

R: Elipsa cu focarele în z = 2i şi z = 4i.

6. Arătaţi că în C au loc relaţiile:

a) $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2$

b) $|z_1-z_2|^2 = |z_1|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2$

c) $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$ (legea paralelogramului).

2.1. Aplicaţii diverse

Operaţii cu numere complexe

1. a) Determinaţi valorile întregi ale lui n pentru care puterile:

$$(1+i)^n;\left(\sqrt{3}+i\right);\left(1\text{-}i\sqrt{3}\right)^n$$

sunt reale.

b). Determinaţi valorile întregi ale lui n pentru care puterile respective sunt imaginare

2. Ce curbă va descrie imaginea lui z = x + iy dacă $\dfrac{1}{z}$ are partea reală constantă?

3. Ce curbă va descrie imaginea lui z = x + iy dacă

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = k, k \in R_+^* \ ?$$

2.2. Soluţii

Operaţii cu numere complexe

1.

$$z_1 = (1+i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n$$

$$z_2 = \left(\sqrt{3}+i\right)^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n$$

$$z_3 = \left(1-i\sqrt{3}\right)^n = \left(2e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)^n$$

$$\operatorname{Im} z_k = 0 \quad k = \overline{1,3}$$

$$\sin\frac{n\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow n\pi = 4k\pi \Rightarrow n = 4k$$

$$\sin\frac{n\pi}{6} = 0 \Rightarrow n = 6k$$

$$\sin\frac{5n\pi}{3} = 0 \Rightarrow n = \frac{3k}{5}, k = 5l \Rightarrow n = 3l.$$

2. Să se demonstreze următoarele identităţi în C :

a) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$

b) $|z_1 + z_1|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2$

c) $|1 + z_1\bar{z}_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = \left(1 + |z_1|^2\right)\left(1 + |z_2|^2\right)$

d) $|1 - z_1\bar{z}_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = \left(1 - |z_1|^2\right)\left(1 - |z_2|^2\right)$

e) $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$

Indicaţie: Se foloseşte relaţia $z\bar{z} = |z|^2$.

3. Dacă $|z_i| = r, i = 1,2,..., n, n \geq 2,$ atunci

a) $E = \dfrac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)...(z_n + z_1)}{z_1 z_2 ... z_n} \in R$

b) $F = (z_1 + \bar{z}_2)(z_2 + \bar{z}_3)...(z_n + \bar{z}_1) \in R$

Soluţie:

$$\bar{E} = \frac{(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)(\bar{z}_2 + \bar{z}_3)...(\bar{z}_n + \bar{z}_1)}{\bar{z}_1 \bar{z}_2 ... \bar{z}_n} =$$

$$= r^{2n}\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)\left(\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right)...\left(\frac{1}{z_n} + \frac{1}{z_1}\right)\frac{z_1 z_2 ... z_n}{r^{2n}} = E$$

Deci $\bar{E} = E$ implică $E \in R$.

4. Aplicaţii la olomorfie

Enunţuri

4.1. a) Stabiliţi domeniul de olomorfie al funcţiilor

$$f(z) = \ln z; \quad f(z) = \frac{1}{\bar{z}}; \; f(z) = \frac{z}{1+\bar{z}}$$

b) Reprezentaţi în planul complex domeniul respectiv

4.2. a) Demonstraţi că funcţia $v(x, y) = e^x \sin y$ poate fi parte imaginară a unei funcţii f(z) olomorfe.

b) Determinaţi funcţia f(z) ştiind că f(0)=1.

c) Determinaţi expresia lui f(z) în funcţie de z.

4.3. Fie funcţiile:

a) $u(x, y) = (e^x - e^{-x})\cos y$

b) $u(x,y) = e^{x}(x\cos y - y\sin y)$

c) $v(x,y) = \left(e^{x} + e^{-x}\right)\sin y$

Demonstraţi existenţa unei funcţii f(z) monogene pe un domeniu Δ_f (care se va determina) şi stabiliţi expresia funcţiei respective.

Indicaţii şi soluţii

4.1. $f(z) = \ln z,\ f(z) = \ln\rho + i(\varphi + 2k\pi),\ k \in Z$ dacă $z = \rho e^{i\varphi}$.

Deci $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; $v(x, y) = \arctan\dfrac{y}{x} + 2k\pi$

Condiţiile Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \text{vor deveni} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} = \dfrac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

cu soluţiile y = 0, x > 0.

Domeniul de monogenitate este semiaxa pozitivă a axei reale.

Dacă

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad \text{atunci} \quad f(z) = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$$

de unde

$$\begin{cases} u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Condiţiile Cauchy-Riemann ne vor conduce la sistemul:

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = x^2 - y^2 \\ -2xy \quad = 2xy \end{cases}$$

cu soluţia unică

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

care reprezintă originea sistemului de axe, dar care nu aparţine domeniului de definiţie al funcţiei.

Deci funcţia dată nu e monogenă în nici un punct din planul complex.

Domeniul de monogenitate este mulţimea vidă. Pentru

$$f(z) = \frac{z}{1+\bar{z}} \Rightarrow f(z) = \frac{x + x^2 - y^2 + iy(2x+1)}{(1+x)^2 + y^2}$$

Deci

$$u(x,y) = \frac{x + x^2 - y^2}{(1+x)^2 + y^2} \quad \text{şi} \quad v(x,y) = \frac{y(2x+1)}{(1+x)^2 + y^2}$$

Condiţiile Cauchy-Riemann ne conduc la sistemul:

$$\begin{cases} (1+x)(x + x^2 - y^2) = y^2(2x+1) \\ 1 + 3x + 2x^2 = (1+x)(2xy + y) \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} (1+x)(x + x^2 - y^2) = y^2(1+2x) \\ (1+x)(1+2x) = y(1+x)(1+2x) \end{cases}$$

Din ultima ecuaţie avem x = -1 sau $x = -\frac{1}{2}$ sau y = 1. Pentru x = -1 rezultă (din prima ecuaţie) y = 0, dar punctul (-1,0) nu aparţine domeniului de definiţie al funcţiei.

Pentru $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm i\frac{\sqrt{2}}{2} \notin R$. Pentru $y = 1 \Rightarrow x_1 = 0; x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{2}$. Deci domeniul de monogenitate al funcţiei este format din punctele: $z_1 = i;\ z_2 = -1 + \sqrt{2} + i; z_3 = -1 - \sqrt{2} + i$.

4.2. a) Pentru ca $v(x,y)=e^x \sin y$ să fie parte imaginară a unei funcţii olomorfe, trebuie să fie funcţie armonică, adică $\Delta v=0$ sau $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$

Se verifică uşor.

b) Determinarea funcţiei f(z) se face folosind condiţiile Cauchy-Riemann, din care se obţine funcţia u(x,y).

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{(t,y_0)}dt+\int_{y_0}^{y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{(x,t)}dt=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\left(e^t\cos y_0\right)dt-\int_{y_0}^{y}e^x\sin t\,dt=e^x\cos y_0-e^{x_0}\cos y_0+$$

$$+e^x\cos y-e^x\cos y_0=e^x\cos y-e^{x_0}\cos y_0.$$

Ultimul termen reprezintă o constantă, deci $u(x,y)=e^2\cos y+C.$

$$f(z)=e^x\cos y+C+ie^x\sin y$$

Din condiţia dată $f(0)=1\Rightarrow e^0+C=1\rightarrow C=0,$ deci $f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y.$

c) $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)=e^xe^{iy}=e^{x+iy}=e^z.$